述語論理

1 述語

対象 a と性質（または条件）P に対して，$P(a)$ で「a は性質 P をもつ」または「a は条件 P を満たす」を表す．$P(a)$ を「a は P である」と読むこともあり，P は述語 (predicate) と呼ばれる．P は，考えている対象の全体を定義域とし，命題を値にとる関数と考えることもできるので，命題関数とも呼ばれる．考えている対象の全体を，対象領域 ([object] domain) または論議世界 (universe of discourse) と呼び，その中には少なくとも 1 つは対象が存在するものとする．命題関数 P は，変数を明示するときには $P(x)$ などと書く．“x” は ただの記号であるから，$P(x)$ 自体は命題ではない．x の値を定めたときに命題になり，その真偽が定まる．

例 1 対象領域を正の整数全体とする．

(1) $P(x)$ で「x は偶数である」を表すと，
$P(2)$ は「2 は偶数である」という真なる命題，
$P(5)$ は「5 は偶数である」という偽なる命題となる．

(2) $F(x, y)$ で「$2x + 1 = y$」を表すと，
$F(2, 5)$ は「$2 \times 2 + 1 = 5$」という真なる命題，
$F(3, 9)$ は「$2 \times 3 + 1 = 9$」という偽なる命題となる．

なお，$F(x, 3)$ は「$2x + 1 = 3$」という 1 変数の命題関数であり，$F(x, x)$ は「$2x + 1 = x$」という 1 変数の命題関数である．

命題関数を命題結合記号で結合したもの——例えば $\neg P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $[P(x) \vee Q(y)] \Rightarrow R(x, y)$ など——も命題関数である．

2 限定命題

1 変数の命題関数 $P(x)$ と その対象領域が与えられたとき，$\forall x\, P(x)$ および $\exists x\, P(x)$ で，それぞれ次の命題を表す．

$\forall x\, P(x)$:「すべての x に対して $P(x)$」($P(x)$ for all x),
「任意の x について $P(x)$」($P(x)$ for arbitrary x).

$\exists x\, P(x)$:「少なくとも 1 つの x に対して $P(x)$」($P(x)$ for at least one x),
「$P(x)$ なる x が存在する」 (there exists x such that $P(x)$),
「ある x について $P(x)$」($P(x)$ for some x).

$\forall x\, P(x)$ を全称 (universal) 命題, $\exists x\, P(x)$ を存在 (existential) 命題と言い, 合わせて限定(quantified) 命題と言う. また, $\forall$ を全称記号, $\exists$ を存在記号と呼び, 合わせて限定記号と呼ぶ. 限定記号と命題結合記号を合わせて論理記号と言う. また, 論理記号, 命題関数, 変数などで表された式を論理式と言う.

例 2 対象領域を実数全体とするとき, $\forall x\,(x^2 \geq 0)$ は真,
$\exists x\,(x^2 \geq 0)$ も真, $\forall x\,(x^2 - 1 = 0)$ は偽, $\exists x\,(x^2 - 1 = 0)$ は真.

注: $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \forall y\, P(y)$ であり, $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(y)$ である.

問 1 対象領域を正の整数全体とするとき, 下の (a)–(e) の命題の真偽を判定せよ.

(a) $\forall x\,(x \leq 1)$ (b) $\forall y\,(1 \leq y)$ (c) $\forall y\,(2 \leq y)$
(d) $\exists x\,(x \leq 1)$ (e) $\exists y\,(1 \leq y)$

対象領域には少なくとも 1 つの対象が存在するので, 次の法則が成り立つ.

$$\forall x\, P(x) \implies \exists x\, P(x).$$

対象領域が n 個の対象 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ だけからなるとき, $\forall$ は $\wedge$ で表せ, $\exists$ は $\vee$ で表せる.

$$\forall x P(x) \iff P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n),$$
$$\exists x P(x) \iff P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

次の法則も常に成り立つ.

$$\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y) \iff \forall x\,(P(x) \wedge Q(x)),$$
$$\exists x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y) \iff \exists x\,(P(x) \vee Q(x)).$$

限定命題の否定について，次の **de Morgan 律** (重要 !!) が成り立つ[*].

$$\neg\forall x\, P(x) \iff \exists x\, \neg P(x), \qquad \neg\exists x\, P(x) \iff \forall x\, \neg P(x).$$

$\forall x\, P(x)$ が偽のとき，$\neg P(a)$ なる対象 a を，$\forall x\, P(x)$ または単に P の **反例** (counterexample) という.

問 2　問 1 で真と判定した存在命題について，存在する対象の例を示せ. また，偽と判定した全称命題について反例を示せ.

3　多重限定命題

2 つ以上の変数をもつ述語からも限定命題が構成される．例えば，2 変数の命題関数 $P(x,y)$ に対して，$\forall xP(x,y)$, $\forall yP(x,y)$, $\exists xP(x,y)$, $\exists yP(x,y)$ はどれも 1 変数の命題関数になるので[†]，これらの変数をさらに限定すれば以下の 8 通りの限定命題が構成される[*].

$\forall x\forall y\, P(x,y)$:　「すべての x とすべての y に対して $P(x,y)$」

$\forall y\forall x\, P(x,y)$:　「すべての y とすべての x に対して $P(x,y)$」

$\exists x\exists y\, P(x,y)$:　「少なくとも 1 つの x に対して，少なくとも 1 つの y が存在して $P(x,y)$」

$\exists y\exists x\, P(x,y)$:　「少なくとも 1 つの y に対して，少なくとも 1 つの x が存在して $P(x,y)$」

$\forall x\exists y\, P(x,y)$:　「すべての x に対して，それぞれ少なくとも 1 つの y が存在して $P(x,y)$」　(一般に y は x に応じて決まる)

$\forall y\exists x\, P(x,y)$:　「すべての y に対して，それぞれ少なくとも 1 つの x が存在して $P(x,y)$」　(一般に x は y に応じて決まる)

$\exists x\forall y\, P(x,y)$:　「少なくとも 1 つの x が存在して，すべての y について $P(x,y)$」　(x は y に依存しない)

$\exists y\forall x\, P(x,y)$:　「少なくとも 1 つの y が存在して，すべての x について $P(x,y)$」　(y は x に依存しない)

---

[*] $\forall, \exists$ の結合の強さは最強で，否定 $\neg$ と同レベル．例えば，$\neg\forall xP(x)$ は $\neg[\forall xP(x)]$, $\exists x\neg P(x)$ は $\exists x[\neg P(x)]$ という意味．また，$\forall x\exists yP(x,y)$ は $\forall x[\exists yP(x,y)]$ という意味.

[†] 限定記号で限定された変数を束縛 (bound) 変数，限定されていない変数を自由 (free) 変数という．自由変数が命題関数における変数となる.

例 3 対象領域を正の整数全体とし，$P(x,y)$ を $x \le y$ とすると，

$\forall x \forall y\,(x \le y)$ と $\forall y \forall x\,(x \le y)$ は偽（反例：$x=2,\ y=1$ など），
$\exists x \exists y\,(x \le y)$ と $\exists y \exists x\,(x \le y)$ は真（例：$x=y=1$ など），
$\forall x \exists y\,(x \le y)$ は真（どんな x についても，それぞれ $y=x$ のとき $x \le y$），
$\exists y \forall x\,(x \le y)$ は偽（どんな y についても，それぞれ $x=y+1$ のとき $x \not\le y$），
$\exists x \forall y\,(x \le y)$ は真（$x=1$ のとき，どんな y についても $x \le y$），
$\forall y \exists x\,(x \le y)$ も真（どんな y についても，$x=1$ のとき $x \le y$）．

$P(x,y)$ が どのような述語でも以下のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} \forall x \forall y\, P(x,y) &\iff \forall y \forall x\, P(x,y), \\ \exists x \exists y\, P(x,y) &\iff \exists y \exists x\, P(x,y), \\ \exists x \forall y\, P(x,y) &\implies \forall y \exists x\, P(x,y). \end{aligned}$$

例 4 対象領域を正の整数全体とするとき，Fermat の最終定理「n を2より大きい整数とするとき，方程式 $x^n + y^n = z^n$ は，正の整数解 $x,\ y,\ z$ を持たない」は次のように表される．

$$\forall n\,[n > 2 \Rightarrow \neg \exists x \exists y \exists z\,(x^n + y^n = z^n)].$$

問 3 対象領域を正の整数全体とする．

(a) $P(x,y)$ を $x \le y$ とするとき，下の (9)–(12) の真偽を判定せよ．

(b) $P(x,y)$ を $x < y$ とするとき，下の (1)–(12) の真偽を判定せよ．

ただし，例3の括弧のように，存在記号を含む命題が真のときには例を，全称記号を含む命題が偽のときには反例を示し，説明すること．

(1) $\forall x \forall y\, P(x,y)$ (2) $\forall y \forall x\, P(x,y)$ (3) $\exists x \exists y\, P(x,y)$
(4) $\exists y \exists x\, P(x,y)$ (5) $\forall x \exists y\, P(x,y)$ (6) $\exists y \forall x\, P(x,y)$
(7) $\exists x \forall y\, P(x,y)$ (8) $\forall y \exists x\, P(x,y)$ (9) $\forall x\, P(x,x)$
(10) $\forall x \forall y\,[P(x,y) \wedge P(y,x) \Rightarrow x = y]$
(11) $\forall x \forall y \forall z\,[P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)]$
(12) $\forall x \forall y\,[P(x,y) \vee P(y,x)]$

必 1 対象領域を正の整数全体とする．$P(x,y)$ を $x \mid y$ とするとき[‡]，問3の (1)–(12) の真偽を判定せよ．存在記号を含む命題が真のときには例を，全称記号を含む命題が偽のときには反例を示し，説明すること．

[‡] $x \mid y$ は，y が x で割り切れること，つまり $y = qx$ となるような正の整数 q が存在することを表す（例：$2|6$ は真，$3|7$ は偽）．

問 4 対象領域を正の整数全体とする．

(a) 下の空欄 □ に当てはまる最も適切な語を答えよ．

n を変数とする次の1変数命題関数は「n は□である」を意味する．

$$\neg(n=1) \ \wedge\ \forall m\,[m|n \ \Rightarrow\ (m=1\ \vee\ m=n)]$$

(b) ⋆ 下の命題関数 $P(m,n)$ と $Q(\ell,m,n)$ を論理記号と括弧，英小文字，正の整数，等号 $=$，整除関係 $|$ を用いて書け．ただし，記号$+$, $-$, $\times$, $/$, $\div$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ を使ってはならない．

$P(m,n)$: m と n は互いに素 (relatively prime), i.e., 最大公約数が 1.

$Q(\ell,m,n)$: ℓ は m と n の最小公倍数 (least common multiple).

4　変域の制限（付帯条件つき限定命題）

$\forall x\,[M(x) \Rightarrow P(x)]$: 「$\underline{M(x)\text{ なる すべての }x\text{ に対して}}$ $P(x)$」
（「すべての x に対して，$M(x)$ ならば $P(x)$」）

$\exists x\,[M(x) \wedge P(x)]$: 「$\underline{M(x)\text{ なる少なくとも 1 つの }x\text{ が存在して}}$ $P(x)$」
（「少なくとも 1 つの x が存在して，$M(x)$ かつ $P(x)$」）

特に，$M(x)$ が $x \in A$ の形のときは，

$$\begin{aligned} &\forall x\,[(x\in A) \Rightarrow P(x)] \text{ を } \ \forall x \in A\,[P(x)] \quad \text{または} \quad \forall x \in A;\ P(x), \\ &\exists x\,[(x\in A) \wedge P(x)] \text{ を } \ \exists x \in A\,[P(x)] \quad \text{または} \quad \exists x \in A;\ P(x) \end{aligned} \tag{1}$$

などと簡易表現することも多い．これと同様に，次のようにも書く．

$$\forall x\,[(x>0) \Rightarrow (x^2>0)] \text{ を } \quad \forall x>0\ (x^2>0) \quad \text{または} \quad \forall x>0;\ x^2>0,$$

$$\exists x\,[(x<0) \wedge (x^2=1)] \text{ を } \quad \exists x<0\ (x^2=1) \quad \text{または} \quad \exists x<0;\ x^2=1.$$

否定に関して，次の法則が成り立つ（$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ に注意）．

$$\neg\forall x\,[M(x) \Rightarrow P(x)] \iff \exists x[M(x) \wedge \neg P(x)],$$
$$\neg\exists x\,[M(x) \wedge P(x)] \iff \forall x[M(x) \Rightarrow \neg P(x)].$$

$M(x)$ が $x \in A$ の形のときは，

$$\neg\forall x \in A;\ P(x) \iff \exists x \in A;\ \neg P(x),$$
$$\neg\exists x \in A;\ P(x) \iff \forall x \in A;\ \neg P(x).$$

必 2 文「ぜんぶの男の子が好きな女の子がいる」は，下の (a)–(c) のどの意味にも取れる．男の子 全員の集合を B，女の子 全員の集合を G，対象領域を $B \cup G$，「x が y を好き」を $L(x,y)$ として，下例にならい，(a)–(c) それぞれを，$\forall x \in A$ や $\exists x \in A$ を使った簡易表現の論理式と，簡易表現でない通常の論理式（前ページ (1) の左端）の 2 通りで表せ．

(a) ぜんぶの男の子に好かれている女の子がいる

(b) どんな男の子にも それぞれ好きな女の子がいる

(c) ぜんぶの男の子を好いている女の子がいる

例：「ぜんぶの男の子が ぜんぶの女の子を好き」
　簡易表現：$\forall x \in B\ \forall y \in G;\ L(x,y)$
　通常表現：$\forall x\ [\, x \in B\ \Rightarrow\ \forall y\ (y \in G\ \Rightarrow\ L(x,y)\,)\,]$
「ある女の子がある男の子を好き」
　簡易表現：$\exists y \in G\ \exists x \in B;\ L(y,x)$
　通常表現：$\exists y\ [\, y \in G\ \wedge\ \exists x\ (x \in B\ \wedge\ L(y,x)\,)\,]$

5 一意に存在する

記号 $\exists!$ や $\exists^1$ で「一意に (uniquely) 存在する」を表すことがある．つまり，

$\exists! x\, P(x)$:「$P(x)$ なる x が一意 [的] に存在する」
　　　　「$P(x)$ なる x が唯一存在する」

論理記号で書くと，次のようになる．

$$\begin{aligned} \exists! x\, P(x) &\iff \exists x\, P(x) \wedge \forall x \forall y\, [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y\,] \\ (&\iff \exists x\, [P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \Rightarrow y = x)\,]\ ). \end{aligned} \tag{2}$$

例 5 対象領域を実数全体とするとき，下式は真である．

$$\forall a\, \forall b\, \forall c\ [a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac = 0\ \Rightarrow\ \exists! x\, (ax^2 + bx + c = 0)]$$

問 5 ⋆「$P(x)$ なる x が ちょうど 2 つ存在する」を意味する論理式を，式 (2) の右辺を参考に，$\exists!$ を用いずに書け（もちろん，等号 $=$ は使う）．なお，対象領域には十分多く（3 つ以上）の対象が存在するとする．

付録：数学における慣習的な記法

(1) 論理記号は あまり使わない [§].

(2) ある概念を条件で定義する場合，$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$（または $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$）の右辺で左辺を定義する [¶]．例えば，必 1 での $|$ の定義は次のようになる．

$$x|y \;\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}\; \exists q\,(y = xq).$$

等式で定義する場合は，$\triangleq$ (または $\overset{\text{def}}{=}$, $:=$, $\equiv$) の右辺で左辺を定義する．例えば，階乗の再帰的定義は次のようになる．

$$0! \;\triangleq\; 1, \qquad n! \;\triangleq\; (n-1)! \times n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) 全称条件命題や全称双条件命題で，全称記号とその後ろの変数を省略することがある．すなわち，

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\,[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$
$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\,[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

をそれぞれ下のようにも書く：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \;\Longrightarrow\; G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \;\Longleftrightarrow\; G(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

また，これらの否定

$$\neg\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\,[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$
$$\neg\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\,[F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

を それぞれ下のようにも書く：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \;\not\Longrightarrow\; G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \;\not\Longleftrightarrow\; G(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

[§] あまり使わないのは，論理記号の表現能力が不十分だからなのではない．むしろ，論理記号の表現能力は完全である．すなわち，数学対象に関する数学的言明は すべて論理式で表現可能である．論理記号を あまり使わないのは，ヒトは ふつう，記号でなくコトバで意思の疎通をしているからである．

[¶] Δ は，definition の頭文字 d に対応するギリシア文字 delta の大文字.

(4) 変域の等しい変数が同じ限定記号で限定され，連続して並んでいるとき，1つの限定記号と変域表示だけで済ますことがある．例えば,

$$\forall x \in X, \forall y \in X; P(x,y)$$

を

$$\forall x, y \in X; P(x,y)$$

とも書く.

(5) $\forall x$ を前置でなく後置することがある．例えば,

$$\forall x\,(f(x) \geq 0)$$

を

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

とも書く[‖].

(6) $\exists x\, P(x)$ を $\exists x$ s.t. $P(x)$ と書くことがある (s.t. は such that の略).

(7) $\neg\exists x\, P(x)$ を $\nexists x\, P(x)$ または $\nexists x$ s.t. $P(x)$ と書くことがある.

(8) 限定変数の変域が慣習や文脈から明らかなときは，書かずに省略することがある．例えば，n や m は正の整数，ε は正の実数を表す習慣があるので，実数列の収束の定義（対象領域は実数全体）

$$x_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}\,(m \geq n \ \Rightarrow\ |x_m - a| < \varepsilon)$$

（$\mathbb{N}$ は正の整数全体からなる集合）を次のように書いたりする.

$$\begin{aligned} x_n \to a \quad &\iff \quad \forall \varepsilon,\ \exists n\,(m \geq n \ \Rightarrow\ |x_m - a| < \varepsilon) \\ &\iff \quad \forall \varepsilon,\ \exists n,\ \forall m \geq n\ ;\ |x_m - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

[‖] 板書などでは　$f(x) \geq 0$ for $\forall x$　と書くこともある.